ECOLES NORMALES SUPERIEURES ST-CLOUD FONTENAY

GROUPE A — PREMIERE EPREUVE

Pour tout couple (m, n) d'entiers strictement positifs, on note $\mathfrak{M}(m, n)$ l'espace vectoriel réel des matrices réelles à m lignes et n colonnes. Pour tout $A \in \mathfrak{M}(m, n)$ on désigne par a_{ij} l'élément de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne de A; et on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

On dira que $A \in \mathfrak{M}(m, n)$ est positive (resp. strictement positive), et on notera $A \geqslant 0$, (resp. $A > 0$) si pour tout couple (i, j) d'entiers, avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_{ij} \geqslant 0$, (resp. $a_{ij} > 0$). Pour A et B dans $\mathfrak{M}(m, n)$ on dira que $A \geqslant B$ (resp. $A > B$) si et seulement si $A - B \geqslant 0$ (resp. $A - B > 0$).

Pour $A \in \mathfrak{M}(m, n)$ on notera $|A|$ la matrice de $\mathfrak{M}(m, n)$ de terme général $|a_{ij}|$. On notera $\mathcal{O}$ la matrice nulle de chacun des espaces $\mathfrak{M}(m, n)$ et I la matrice unité de chacun des $\mathfrak{M}(m, m)$.

Si $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathbf{R}$, on notera $\sup \mathcal{B}$ et $\inf \mathcal{B}$ les bornes supérieures et inférieures de cette partie, si elles existent.

On rappelle enfin qu'un espace vectoriel réel de dimension finie peut être muni de la topologie associée à l'une des normes équivalentes que l'on peut définir sur cet espace.

I

Dans cette partie A désigne un élément de $\mathfrak{M}(n, n)$.

1° Montrer que A est positive, (resp. strictement positive), si et seulement si pour tout X de $\mathfrak{M}(n, 1)$ tel que $X \geqslant 0$, $X \neq \mathcal{O}$, on a $AX \geqslant 0$, (resp. > 0).

2° On suppose dans cette question que $A \geqslant 0$.

Pour $X \in \mathfrak{M}(n, 1)$, $X \geqslant 0$, $X \neq \mathcal{O}$, on pose :

$$r(X) = \inf \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant n \, , \; x_i \neq 0 \right\} ;$$

où les x_i sont les éléments de la matrice colonne X.

a. Montrer que $r(X) = \sup \{ \rho \, ; \, \rho \in \mathbf{R} \, , \, AX \geqslant \rho X \}$.

b. On pose $\| X \|_\infty = \sup \{ |x_i| \, ; \, i = 1, \ldots, n \}$.

Soit $P = \{ X \, ; \, X \in \mathfrak{M}(n, 1) \, , \, X \geqslant 0, \, \| X \|_\infty = 1 \}$.

Montrer que $r = \sup \{ r(X) \, ; \, X \in P \}$ existe et que l'on a

$$r = \sup \{ r(X) \, ; \, X \in \mathfrak{M}(n, 1) \, , \, X \geqslant 0, \, X \neq \mathcal{O} \}.$$

c. Soit $Q = \{ (I + A)^{n-1} X \, ; \, X \in P \}$. Vérifier que

$$r = \sup \{ r(Y) \, ; \, Y \in Q \}.$$

(la valeur particulière $(n - 1)$ de l'exposant sera utilisée dans le II, et n'intervient pas, en tant que telle, dans la démonstration).

II

Une matrice A de $\mathfrak{M}(n, n)$ est dite irréductible si et seulement si pour toute partition de $\{ 1, \ldots, n \}$ en deux sous-ensembles I et J (non vides), il existe i dans I et j dans J tels que $a_{ij} \neq 0$. Une matrice est dite réductible si elle n'est pas irréductible.

1° Que peut-on dire d'une matrice ayant une ligne (ou une colonne) de termes tous nuls?

2° Montrer que $A \in \mathfrak{M}(n, n)$ est irréductible si, et seulement si, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, il existe des entiers $k_1, \ldots, k_p$, compris entre 1 et n, tels que les éléments

$$a_{ik_1} \, , \, a_{k_1 k_2} \, ; \, \ldots \, , \, a_{k_p j}$$

de la matrice A soient non nuls.

3° On suppose $A \in \mathfrak{M}(n, n)$, irréductible positive.

a. Montrer que $(I + A)^{n-1}$ est strictement positive.

b. En déduire que la fonction qui à X associe $r(X)$ (défini en I, 2°), est une fonction continue sur Q. (On pourra utiliser, en le justifiant, le fait que si f et g sont deux fonctions d'un espace vectoriel normé dans $\mathbf{R}$, continues, la fonction h définie par $h(X) = \inf \{ f(X) \, , \, g(X) \}$ est continue.)

c. Montrer qu'il existe $Z \in \mathfrak{M}(n, 1)$, $Z > 0$, tel que $AZ \geqslant rZ$, (r défini en I, 2° *b*). En déduire que r est valeur propre non nulle de A, que pour tout X de $\mathfrak{M}(n, 1)$ vérifiant les conditions $X \geqslant 0$, $X \neq \mathcal{O}$, $AX \geqslant rX$, on a $AX = rX$ en fait, et $X > 0$.

d. Soit $B \in \mathfrak{M}(n, n)$ telle que $|B| \leqslant A$ et μ une valeur propre de B. Établir l'inégalité $|\mu| \leqslant r$. Montrer que, si pour une des valeurs propres μ de B on a $|\mu| = r$, alors $|B| = A$.

4° Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes, réelles ou complexes, de $A \in \mathfrak{M}(n, n)$, (donc $k \leqslant n$). On pose

$$\rho(A) = \sup \{ |\lambda_i| ; 1 \leqslant i \leqslant k \}.$$

On suppose encore A irréductible positive.

a. Déduire de ce qui précède que $r = \rho(A)$.

b. Montrer que si B de $\mathfrak{M}(n, n)$ est telle que $|B| \leqslant A$, avec $|B| \neq A$, on a $\rho(B) < \rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est fonction strictement croissante de chaque coefficient a_{ij} de A.

c. Soit B une matrice carrée d'ordre p extraite de A de la manière suivante : on se donne une suite strictement croissante d'entiers compris entre 1 et n, soit $k_1 < \ldots < k_p$ et on pose $b_{uv} = a_{k_u k_v}$ (b_{uv} terme général de la matrice B).

Montrer que $\rho(B) < \rho(A)$ si $p < n$.

d. En déduire que $r = \rho(A)$ est valeur propre simple de A. (On pourra considérer la dérivée de l'équation caractéristique).

III

On suppose dans cette partie que $A \in \mathfrak{M}(n, n)$ est réductible (cf. le début du II). On appelle matrice permutation associée à une permutation σ de $(1, 2, \ldots, n)$, une matrice carrée P, d'ordre n, dont le terme général est $p_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}$ (où $\delta_{rs} = 1$ si $r = s$, 0 si non).

1° Montrer que A est réductible si, et seulement si, il existe une matrice permutation P et un entier r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, tels que si α_{ij} est le terme général de $PA\,{}^tP$, on ait $\alpha_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) d'indices, tel que $r+1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant r$.

2° Soient $n_1, \ldots, n_s$ des entiers strictement positifs tels que $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$. Soit $A \in \mathfrak{M}(n, n)$. On note A_{ij} la matrice extraite de A en ne gardant que :

— les termes des lignes d'indice $n_1 + \ldots + n_{i-1} + u$ avec $1 \leqslant u \leqslant n_i$ si $i > 1$, ou d'indice $1, \ldots, n_1$ si $i = 1$,

— les termes des colonnes d'indice $n_1 + \ldots + n_{j-1} + v$ avec $1 \leqslant v \leqslant n_j$ si $j > 1$ ou d'indice $1, \ldots, n_1$ si $j = 1$.

(On notera encore

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{s1} & \ldots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

et on dira que A est décomposée en blocs).

Montrer que si A est réductible, il existe des entiers $n_1, \ldots, n_s$ strictement positifs, de somme n, et une matrice permutation P telle que la matrice $A' = PA\,{}^tP$ puisse se décomposer en blocs A'_{ij} comme ci-dessus, avec $A'_{ij} = \mathcal{O}$ si $i > j$ et A'_{ii} matrice carrée irréductible ou nulle pour $i = 1, \ldots, s$.

3° On suppose $A \in \mathfrak{M}(n, n)$ réductible positive. Montrer que $\rho(A)$ est valeur propre de A et que $\rho(A) = 0$ si et seulement si il existe une décomposition en blocs vérifiant les conditions du 2° avec $A'_{ii} = \mathcal{O}$ pour $i = 1, \ldots, s$.

4° Soit $A \in \mathfrak{M}(n, n)$ réductible positive. Montrer qu'à la valeur propre $\rho(A)$ correspond un vecteur propre de coordonnées positives ou nulles, et que si $B \in \mathfrak{M}(n, n)$ est telle que $|B| \leqslant A$ on a $\rho(B) \leqslant \rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est fonction croissante de chaque coefficient a_{ij}. (Cette question, plus délicate, se traitera en admettant que la fonction $\rho(A)$ est une fonction continue des éléments a_{ij} de A).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail